

Динамика роторов с трещиной в валах

Дегтярев С.А.,^{1*} Кутаков М.Н.,^{2**} Леонтьев М.К.^{2***}

¹Научно-технический центр по роторной динамике "Альфа-Транзит",
ул. Ленинградская, 1, г. Химки, Московская обл., 141400, Россия

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

*e-mail: degs@alfatran.com

**e-mail: maxim.kutakov@alfatran.com

***e-mail: lemk@alfatran.com

Аннотация

Авторами предлагается методика и алгоритм, в которых трещина моделируется переменным коэффициентом моментной податливости, определяемым для локального участка вала с трещиной. Использование разработанной модели трещины в алгоритмах анализа динамических характеристик роторов авиационных газотурбинных двигателей с трещинами существенно снижает необходимое время для их моделирования и анализа. Анализ показывает, что трещина в вале исследуемого ротора вызывает параметрические резонансы, на режимах $1/3 \omega_{\partial\partial}$; $1/2 \omega_{\partial\partial}$; $1 \omega_{\partial\partial}$, являющиеся следствием роторных гармоник с частотами $1x$, $2x$, $3x$, $4x$ и т.д. В реальных экспериментах представляется возможным выделить две или три роторные гармоники. Наличие субгармонических

резонансов, кратных гармоник и изменение орбиты движения сечений вала могут служить признаками появления трещины.

Ключевые слова: роторная динамика, трещина, нелинейная модель, Dynamics R4.

Введение

Важным направлением вибрационной диагностики авиационных газотурбинных двигателей и турбомашин является диагностика через моделирование. Моделирование позволяет связать наличие того или иного дефекта машины с признаками его появления в вибрационном сигнале. Одним из таких дефектов является появление трещины в валах авиационных двигателей и турбомашин, что недопустимо. Вовремя заметить трещину и спрогнозировать ее развитие является важнейшей задачей диагностической системы.

Следствием появления трещины в роторе является локальное уменьшение жесткости. Величина потери жесткости зависит от геометрических характеристик трещины. При наличии статической нагрузки, например, силы веса, по мере вращения ротора трещина будет открываться и закрываться. Следовательно, меняется жесткость вала за один цикл. Наличие трещины в роторной системе приводит к следующим изменениям в вибрационном сигнале [1]:

- увеличению амплитуды $1x$ гармоники частоты вращения, вследствие роста статического прогиба, вызванного потерей жесткости.
- появлению компоненты $2x$ частоты вращения, вследствие асимметричной жесткости ротора.

- появлению компоненты $3x$ частоты вращения, вследствие циклического открытия и закрытия трещины.

Основной задачей математической модели является описание величины и характера локального изменения жесткости в месте нахождения трещины с учетом максимально возможного набора факторов.

Существует несколько основных подходов к моделированию трещины. В простейших случаях трещина моделируется уменьшением радиальной жесткости всего вала [2,3,4]. В других случаях часть вала, содержащая трещину, заменяется эквивалентным балочным элементом. Коэффициенты матрицы жесткости такого элемента вычисляются с учетом наличия трещины и меняются за цикл. В работе [5] расчет матрицы жесткости балочного элемента с трещиной основан на использовании моментов инерции сечения балки с учетом нахождения в ней трещины. В работе [6] матрица жесткости такого элемента вычисляется на основе уравнений механики разрушения твердых тел. Трещину можно моделировать упругой связью, соединяющей граничные сечения вала в месте ее нахождения и воспроизводящей моментную жесткость трещины [7,8].

Математическое описание изменения жесткости трещины в зависимости от ее открытия и закрытия по мере вращения ротора можно проводить различными способами. В простейшем случае можно представить, что трещина пребывает только в 2 положениях: полностью открыта и полностью закрыта, и для математического описания изменения ее жесткости можно приметить ступенчатую функцию [4].

В работе [3] описаны наиболее распространенные модели изменения жесткости. Одна из них - формула Гасча (Gasch, R.). Изменение жесткости происходит в зависимости от угла между фазой статической силы и фазой трещины и описывается 17 гармониками ряда Фурье. В этой же статье представлена формула Маеса и Девиса (Maes & Davies), по которой жесткость изменяется в зависимости от угла по закону косинуса. В модели Янга (Yang J.D. et al.) жесткость изменяется по косинусу в степени относительной глубины трещины.

В данной статье на базе существующих подходов разрабатывается модель трещины и методика, позволяющие достаточно просто решать задачу для конкретного ротора о выделении признаков, которые можно использовать для диагностики его состояния.

Алгоритм включен в программный комплекс Dynamics R4 [9], который представляет собой специализированную систему по расчету динамического поведения сложных роторных систем.

Модель трещины

В рамках принятой концепции моделирования, трещина в модели вала заменяется упругой связью, разделяющей вал на два участка и описываемой матрицей жесткости с переменными коэффициентами. В отсутствии трещины, между сечениями участков вала выполняется условие совместности деформаций, т.е. все взаимные перемещения запрещены. Введем вращающуюся систему координат $\eta O \epsilon$, лежащую в плоскости трещины, рис.1. Ее начало совпадает с началом неподвижной системы координат XYZ . Вал совершает два движения - собственное вращение и прецессионное движение вокруг оси Z . При описании трещины будем рассматривать только повороты ее сечений вокруг осей η и ϵ . Перемещения по остальным степеням свободы считаются пренебрежимо малыми.

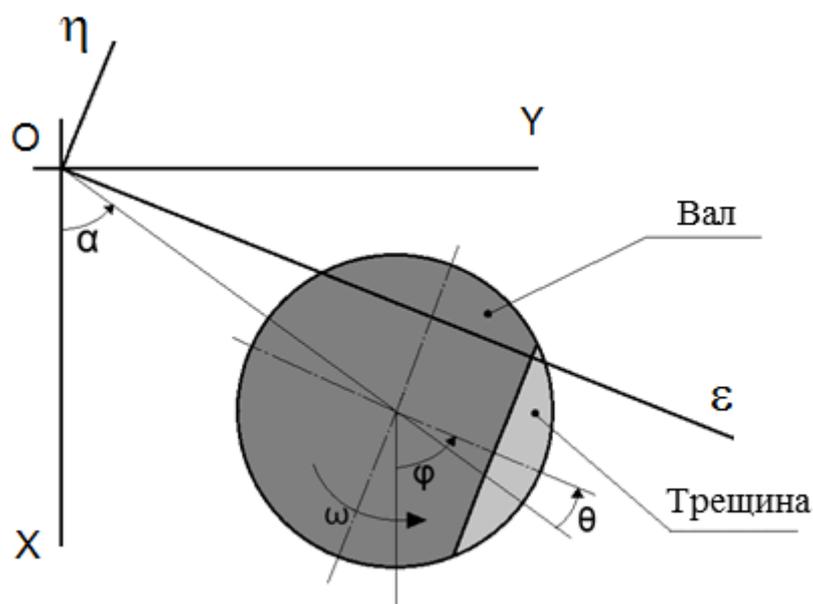


Рис. 1. Сечение трещины

Матрицу податливости связи, моделирующей трещину, во вращающейся системе координат $\eta \epsilon$ можно записать:

$$[G_R(\theta)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{\varepsilon\varepsilon}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{\eta\eta}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\theta = \varphi - \alpha$ - разность фаз, φ - угол поворота вала, α - угол прецессии; $g_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)$ и $g_{\eta\eta}(\theta)$ - переменные коэффициенты моментной податливости.

Податливость зависит от угла θ ввиду того, что по мере вращения вала трещина открывается и закрывается. Матрицу жесткости получаем путем обращения матрицы $[G_R(\theta)]$, причем нулевые коэффициенты податливости на главной диагонали приведут к получению коэффициентов жесткости, стремящихся к бесконечности. Ограничим значение таких коэффициентов жесткости числом $1e10$ Н/м, это допущение не приведет к значительному влиянию на результат, т.е. получим

$$[K_R(\theta)] = \begin{bmatrix} 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{\eta\eta}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

Преобразование матрицы жесткости в неподвижную СК осуществляется по формуле:

$$[K(\theta, \varphi)] = [T]^T \cdot [K_R(\theta)] \cdot [T], \quad (3)$$

где $[T]$ - матрица поворота (4), в которой $C_1 = \cos(\varphi)$, $S_1 = \sin(\varphi)$.

$$[T] = \begin{bmatrix} C_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_1 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

Перемножая матрицы в соответствии с формулой (3) получим:

$$[K(\theta, \varphi)] = \begin{bmatrix} 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1^2 + k_{\eta\eta}(\theta)S_1^2 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1S_1 - k_{\eta\eta}(\theta)C_1S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1S_1 - k_{\eta\eta}(\theta)C_1S_1 & k_{\eta\eta}(\theta)C_1^2 + k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)S_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Проведем некоторые математические преобразования, позволяющие перейти к более простому описанию матрицы жесткости трещины и алгоритму получения ее коэффициентов. В соответствии с моделью Маеса, можно предположить, что радиальная податливость круглой балки с трещиной меняется от минимального до максимального значения по закону косинуса.

$$g(\theta) = \frac{(g_0 + g_c)}{2} + \frac{(g_0 - g_c)}{2} \cos(\theta), \quad (6)$$

где g_0 - податливость балки без трещины (минимальное значение), g_c - податливость балки с открытой трещиной (максимальное значение).

Произведем замену трещины шарниром с моментной жесткостью $k_{m_\theta}^{\varepsilon\eta\delta}$.

Граничные условия балки должны оставить ее статически определимой, например, такие как показано на рис. 2.

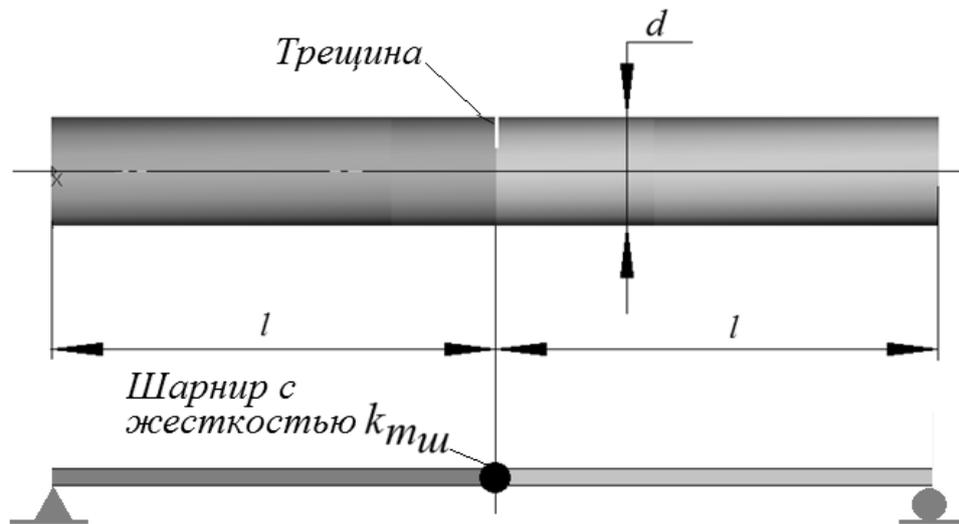


Рис. 2. Замена трещины шарниром

Тогда радиальная податливость выделенного участка вала с открытой трещиной определяется как:

$$g_c = \frac{l^2}{4 \cdot k_{m_o}^{\epsilon \bar{n} \bar{o}}} + \frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{EI} \quad (7)$$

где E - модуль Юнга, I - диаметральный момент инерции сечения вала, $k_{m_o}^{\epsilon \bar{n} \bar{o}}$ - коэффициент моментной жесткости эквивалентной связи, соответствующий полностью раскрытой трещине.

В формуле присутствует два слагаемых - податливость, связанная с трещиной, и податливость балки в отсутствие трещины. Надо отметить, что независимо от формы балки, граничных условий и положения трещины ее вклад в общую податливость балки будет определяться только коэффициентом $k_{m_o}^{\epsilon \bar{n} \bar{o}}$, т.е. первым слагаемым.

По мере вращения балки, податливость в сечении трещины будет изменяться, тогда:

$$g(\theta) = \frac{l^2}{4 \cdot k_{m_\theta}(\theta)} + g_0, \quad (8)$$

где $g_0 = \frac{1}{6} \cdot \frac{l^3}{EI}$ - податливость балки без трещины, $k_{m_\theta}(\theta)$ - текущий коэффициент моментной жесткости для данного θ .

Объединяя два уравнения (5) и (7), получим:

$$\frac{(g_0 + g_c)}{2} + \frac{(g_0 - g_c)}{2} \cos(\theta) = \frac{l^2}{4 \cdot k_{m_\theta}(\theta)} + g_0, \quad (9)$$

откуда с учетом (6) получим закон изменения моментной жесткости в зависимости от разности фаз θ :

$$k_{m_\theta}(\theta) = \frac{2 \cdot k_{m_\theta}^{\text{энн}}}{(1 - \cos(\theta))}, \quad (10)$$

Полученная моментная жесткость эквивалентной связи зависит только от диаметра вала, свойств материала и глубины трещины. Изменение положения трещины в вале, свойств самого ротора, включая опорные узлы, не меняют значения моментной жесткости эквивалентной связи (при условии сохранения в любом месте вала участка с трещиной, для которого она определялась).

Возвращаясь к ранее полученной матрице жесткости ее коэффициенты можно записать:

$$k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta) = \frac{2 \cdot k_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{энн}}}{(1 - \cos(\theta))}, \quad (11)$$

$$k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta) = \frac{2 \cdot k_{\varepsilon\varepsilon}^{\text{энн}}}{(1 - \cos(\theta))}, \quad (12)$$

где $k_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon\bar{n}\bar{o}}$, $k_{\eta\eta}^{\varepsilon\bar{n}\bar{o}}$ - исходные значения моментной жесткости, по соответствующим осям, для полностью открытой трещины.

Задачу вычисления $k_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon\bar{n}\bar{o}}$, $k_{\eta\eta}^{\varepsilon\bar{n}\bar{o}}$ возможно решить двумя способами. Первый способ - расчет моментных жесткостей в МКЭ программе. Второй способ заключается в использовании теории механики разрушения. Он позволяет вычислять значения коэффициентов локальной податливости открытой трещины, если известны ее геометрия, диаметр вала и свойства материала, из которого он изготовлен [7,10].

Алгоритм моделирования роторной системы с трещиной

Опишем шаги, которые надо пройти для получения коэффициентов моментной жесткости трещины.

1. Формируется полная модель ротора в одной из специализированных программ для анализа динамики ротора (например, в Dynamics R4).
2. Выделяется участок вала ротора с трещиной.
3. Трещина делит участок вала на две подсистемы. Между подсистемами вставлена связь, описываемая матрицей переменных коэффициентов жесткости $[K(\theta, \varphi)]$ размерностью $b \times b$.
4. Определяются исходные коэффициенты моментной жесткости $k_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon\bar{n}\bar{o}}$, $k_{\eta\eta}^{\varepsilon\bar{n}\bar{o}}$ для открытой трещины способами приведенными выше. Эти данные являются исходными для расчета.

Расчет коэффициентов матрицы жесткости связи, моделирующей трещину, проводится в ходе интегрирования уравнений движения роторной системы для

каждого значения θ . В нелинейной постановке матричное уравнение, описывающее нелинейную динамическую модель роторной системы, имеет вид:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}, \quad (13)$$

где $[M]$ – матрица инерционных коэффициентов; $[C]$ – матрица коэффициентов демпфирования и гироскопов; $[K]$ – матрица коэффициентов жесткости; $\{\ddot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{u\}$ – соответственно столбцы виброускорений, виброскоростей и виброперемещений; $\{F(t)\}$ – динамические нагрузки любых типов – внутренние и внешние.

Матрицу жесткости эквивалентной связи можно разделить на 2 части: постоянную и переменную, тогда можно записать:

$$[K(\theta, \varphi)] = [K_c] + [K_v(\theta, \varphi)] = \begin{bmatrix} 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1e10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1e10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1^2 + k_{\eta\eta}(\theta)S_1^2 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1S_1 - k_{\eta\eta}(\theta)C_1S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1S_1 - k_{\eta\eta}(\theta)C_1S_1 & k_{\eta\eta}(\theta)C_1^2 + k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)S_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$[K_c]$ включается в общую матрицу жесткости системы $[K]$. Матрица $[K_v(\theta, \varphi)]$

используется для вычисления реакций нелинейной связи:

$$\{R\} = - \begin{bmatrix} k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1^2 + k_{\eta\eta}(\theta)S_1^2 & k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1S_1 - k_{\eta\eta}(\theta)C_1S_1 \\ k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)C_1S_1 - k_{\eta\eta}(\theta)C_1S_1 & k_{\eta\eta}(\theta)C_1^2 + k_{\varepsilon\varepsilon}(\theta)S_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \end{Bmatrix}, \quad (15)$$

где u_{rx} , u_{ry} – взаимные повороты сечений вокруг соответствующих осей.

Конечное уравнение движения системы будет иметь вид:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} + \{R\}. \quad (16)$$

Данное уравнение можно решить численными методами, например, методом Рунге-Куты, методом Ньюмарка и т.д.

Проверка адекватности предлагаемого алгоритма осуществлена путем сравнения значений податливости двухопорной балки с трещиной, полученных в конечно-элементной системе и по предложенному алгоритму в Dynamics R4. Задача заключалась в вычислении прогиба балки под действием единичной силы в сечении трещины для различных фаз между трещиной и силой.

Результаты проверки предлагаемого алгоритма показаны на рис. 3. Сравниваются три результата:

- Податливость вычисляется с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Расчет радиальной податливости модели балки с трещиной в МКЭ системе ведется для всего диапазона угловых положений трещины;

- Податливость Dynamics R4, начальные данные получены с помощью МКЭ.

Исходные значения моментной жесткости для полностью открытой трещины $k_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon\eta\delta}$, $k_{\eta\eta}^{\varepsilon\eta\delta}$ получены путем решения уравнения (7) относительно $k_{m_\phi}^{\varepsilon\eta\delta}$, причем радиальная податливость балки с трещиной g_c по соответствующим направлениям вычисляется с использованием МКЭ. Значение моментной жесткости для промежуточных угловых положений трещины меняется от минимального до максимального значения по закону (10);

- Податливость Dynamics R4. Исходные значения моментной жесткости для полностью открытой трещины $k_{\varepsilon\varepsilon}^{\varepsilon\eta\delta}$, $k_{\eta\eta}^{\varepsilon\eta\delta}$ получены аналитически по алгоритмам механики разрушения [7, 10]. Значение моментной жесткости для промежуточных угловых положений трещины меняется от минимального до максимального значения по закону (10).

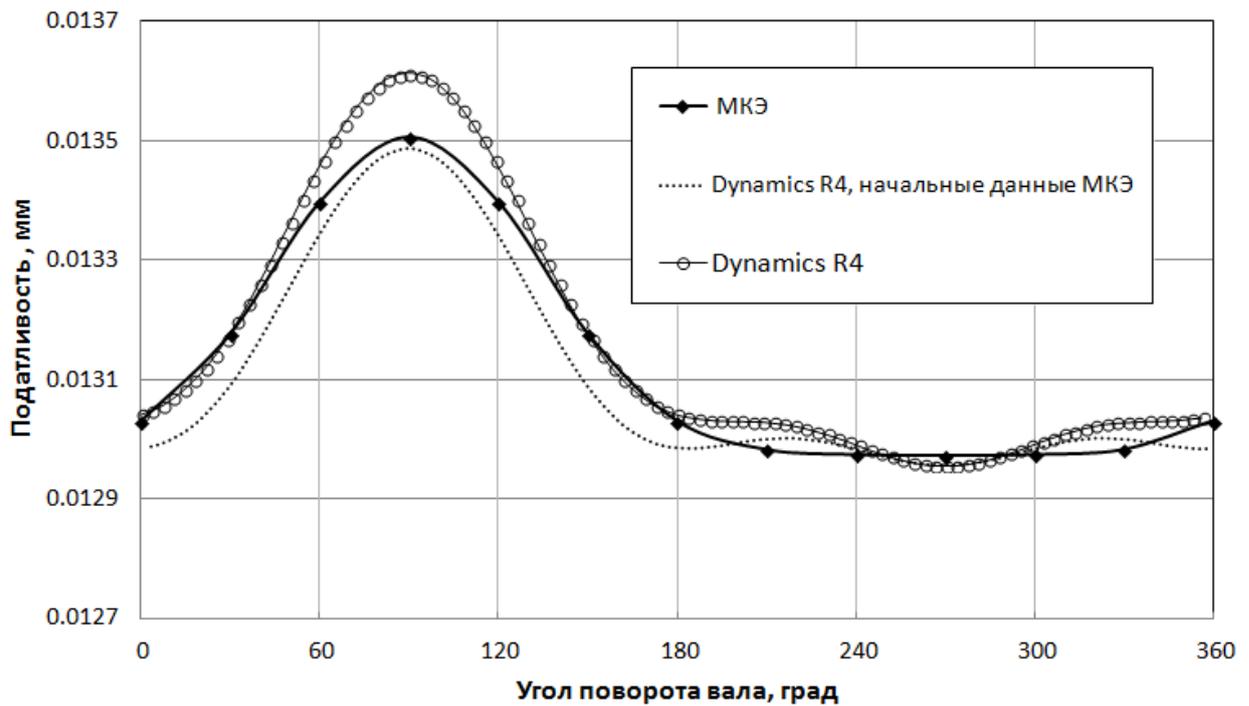


Рис. 3 Изменение податливости балки в сечении трещины за полный оборот

Можно отметить близость результатов расчета МКЭ модели и модели в Dynamics R4, а следовательно, и представленного алгоритма. Результаты расчета с начальными условиями, полученными аналитически, отличаются от результатов МКЭ менее чем на 1%. В то же время, аналитический расчет начальных значений жесткости производится гораздо быстрее МКЭ расчета и требует меньших трудозатрат, и поэтому удобнее.

Геометрия и параметры ротора с трещиной

Геометрия ротора и трещины выбраны таким образом, чтобы наилучшим образом показать работу алгоритма, табл.1. Ротор с центральным диском, опоры расположены по концам вала.

Таблица 1

Параметр	Численное значение
Длина вала, мм	400
Диаметр вала, мм	10
Плотность материала вала, кг/м ³	7800
Модуль упругости материала вала, Н/м ²	$2,1 \cdot 10^{11}$
Радиальная жесткость опор, Н/м	$1,3 \cdot 10^8$
Расположение трещины, мм	200
Масса диска, кг	0,875
Полярный момент инерции диска, кг-м ²	0,000634
Диаметральный момент инерции диска, кг-м ²	0,000365
Модуль упругости материала диска, Н/м ²	$2,1 \cdot 10^{11}$
Расположение трещины, мм	200
Глубина трещины, мм	3

Результаты моделирования

Для демонстрации влияния трещины на динамическое поведение ротора произведен расчет разгона ротора в диапазоне от 0 до 4000 об/мин. Внешним воздействием является только сила веса. Первая критическая скорость вращения такого ротора составляет $\omega_{\text{ед}} = 2643,6$ об/мин (44,06 Гц). На рис. 4 показана полученная амплитудно-частотная характеристика (АЧХ).

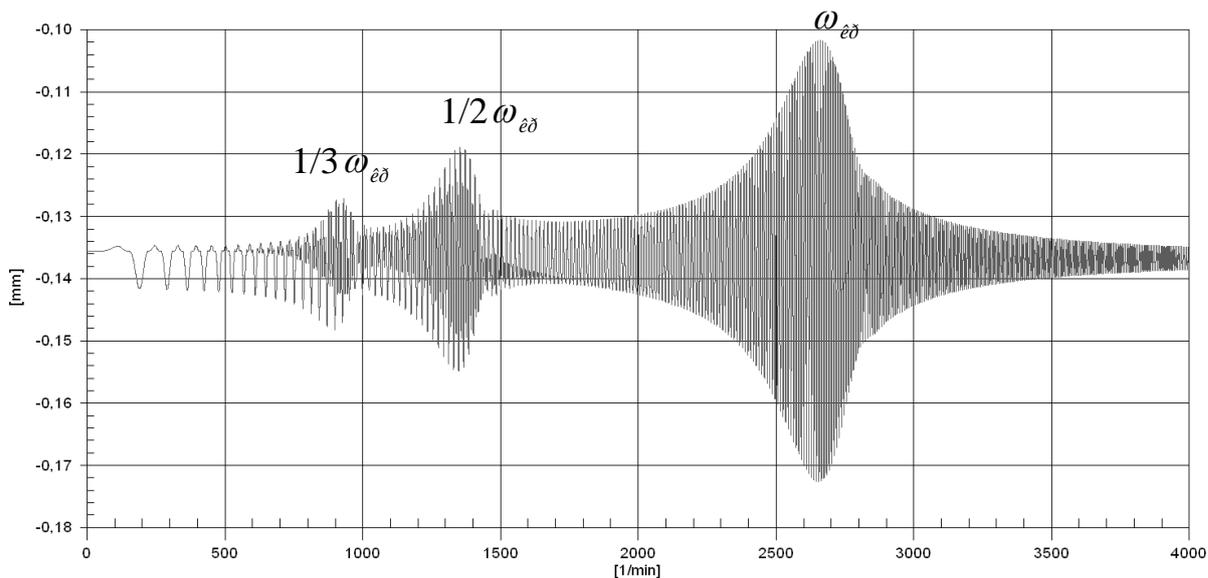


Рис 4. АЧХ в сечении трещины

На $1/3$ и $1/2$ от критической частоты вращения возникают параметрические резонансы, являющиеся следствием циклического изменения моментной жесткости.

На каскадной диаграмме видны $1x$, $2x$ и $3x$ роторные гармоника, рис.5.

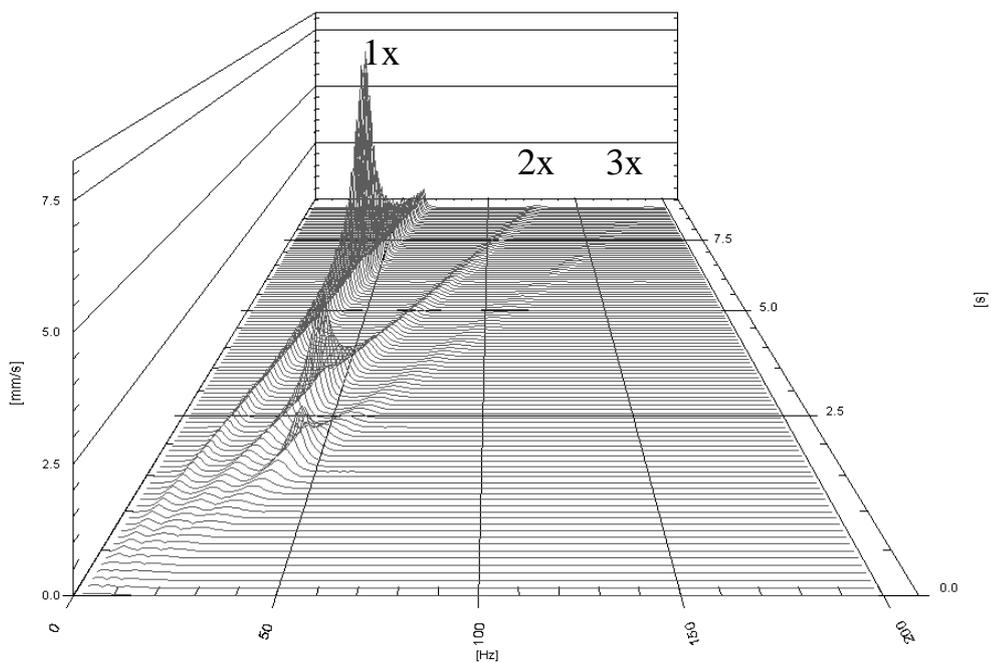


Рис 5. Каскадная диаграмма виброскорости в процессе разгона ротора до 4000 об/мин.

Ниже приведены динамические характеристики ротора (спектры и орбиты) на режимах $\omega = 1/3\omega_{\text{эд}}$, $\omega = 1/2\omega_{\text{эд}}$, $\omega = \omega_{\text{эд}}$. Внешней нагрузкой является только сила веса.

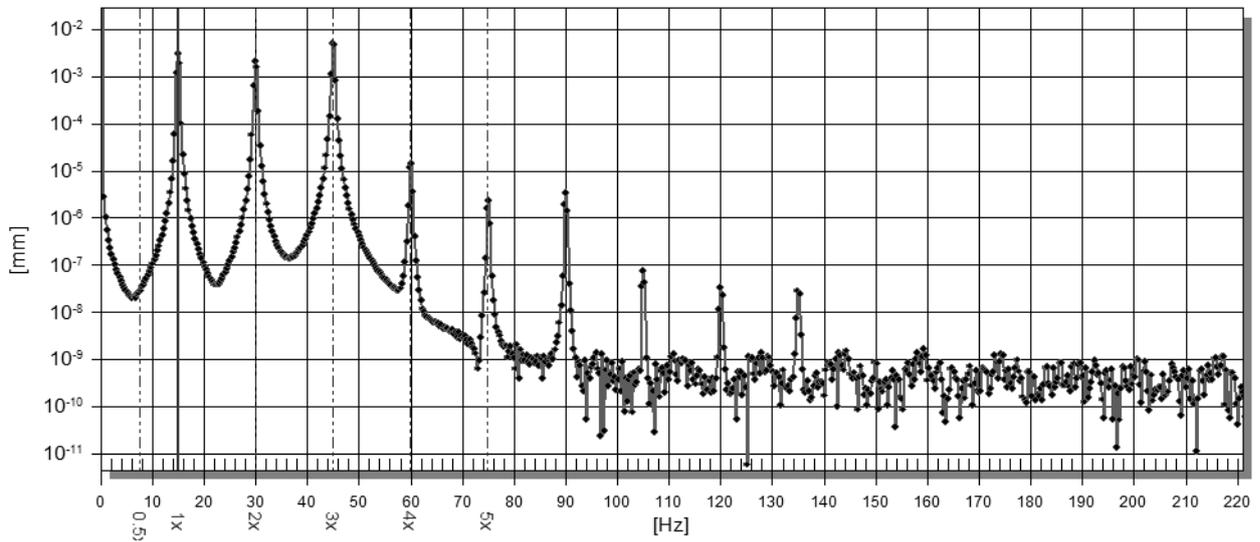


Рис. 6 Спектр сигнала на режиме $1/3\omega_{\text{эд}}$ в логарифмических координатах

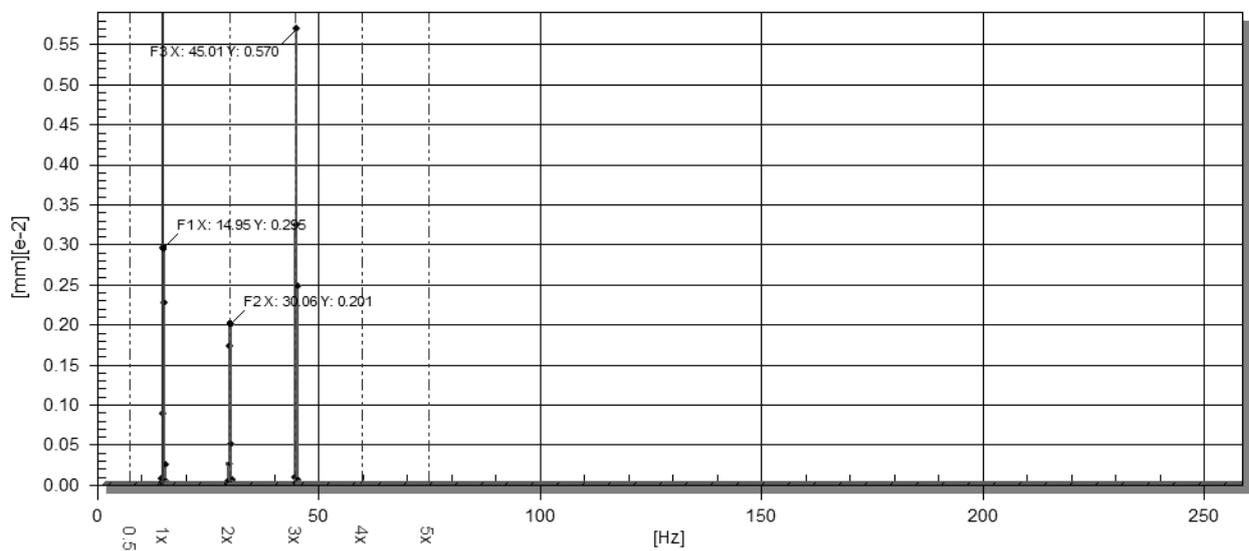


Рис. 7 Спектр сигнала на режиме $1/3\omega_{\text{эд}}$ в линейных координатах

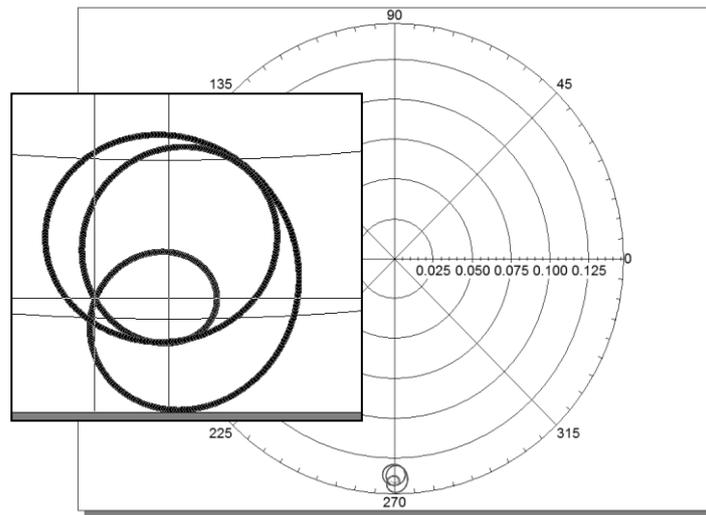


Рис. 8 Орбиты центра ротора в сечении трещины на режиме $1/3 \omega_{\epsilon\delta}$

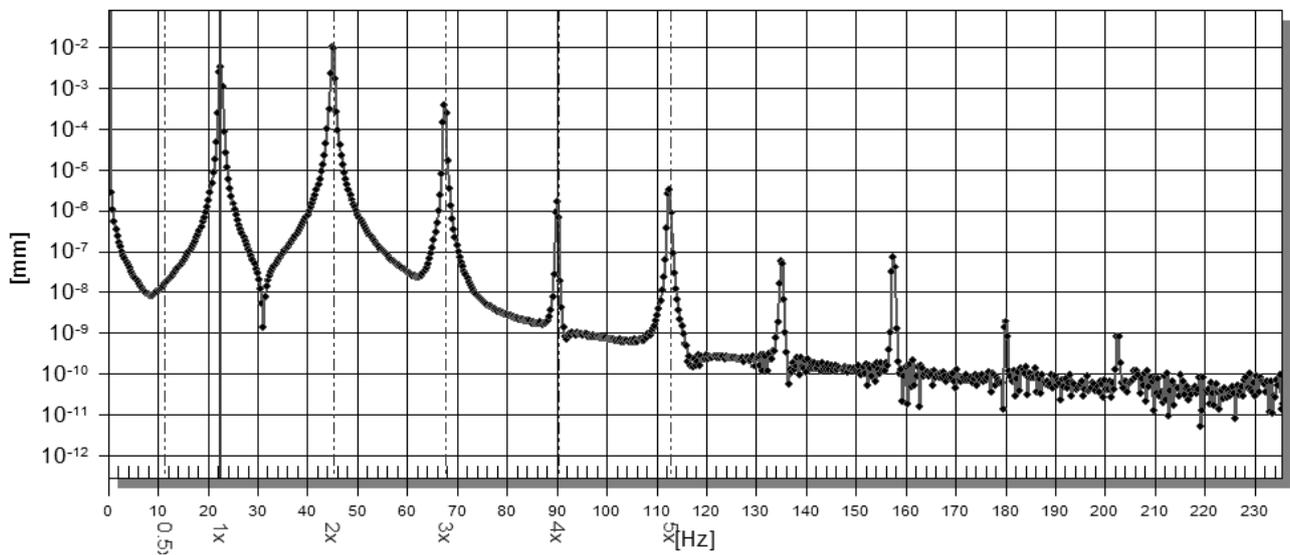


Рис. 9 Спектр сигнала на режиме $1/2 \omega_{\epsilon\delta}$ в логарифмических координатах

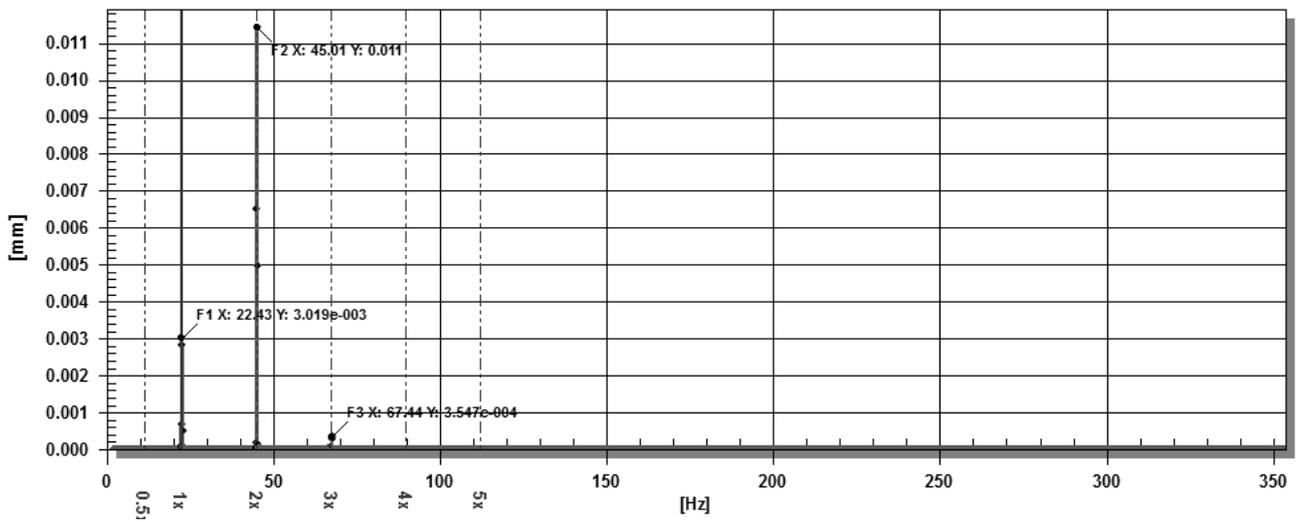


Рис. 10 Спектр сигнала на режиме $1/2 \omega_{\text{эд}}$ в линейных координатах

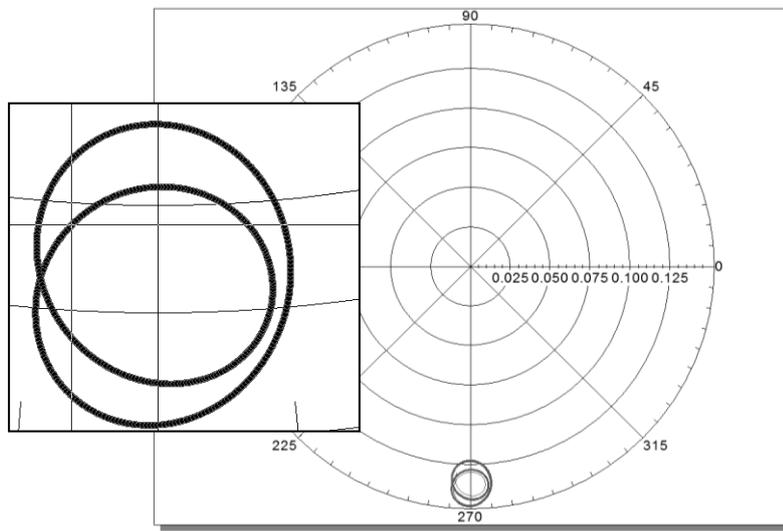


Рис. 11 Орбиты центра ротора в сечении трещины на режиме $1/2 \omega_{\text{эд}}$

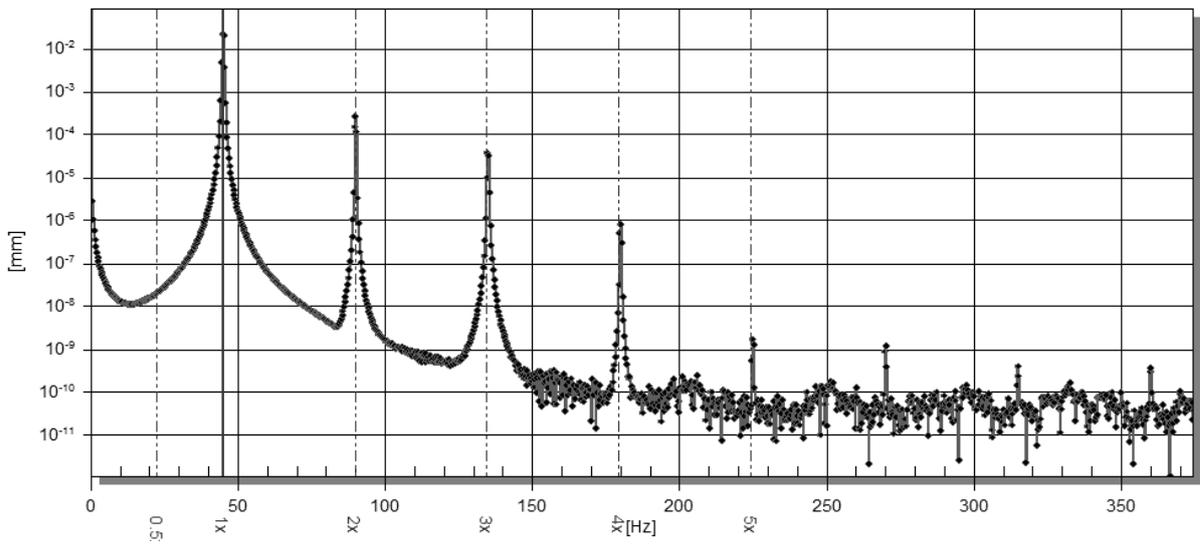


Рис. 12 Спектр сигнала на режиме $\omega_{\dot{\theta}}$ в логарифмических координатах

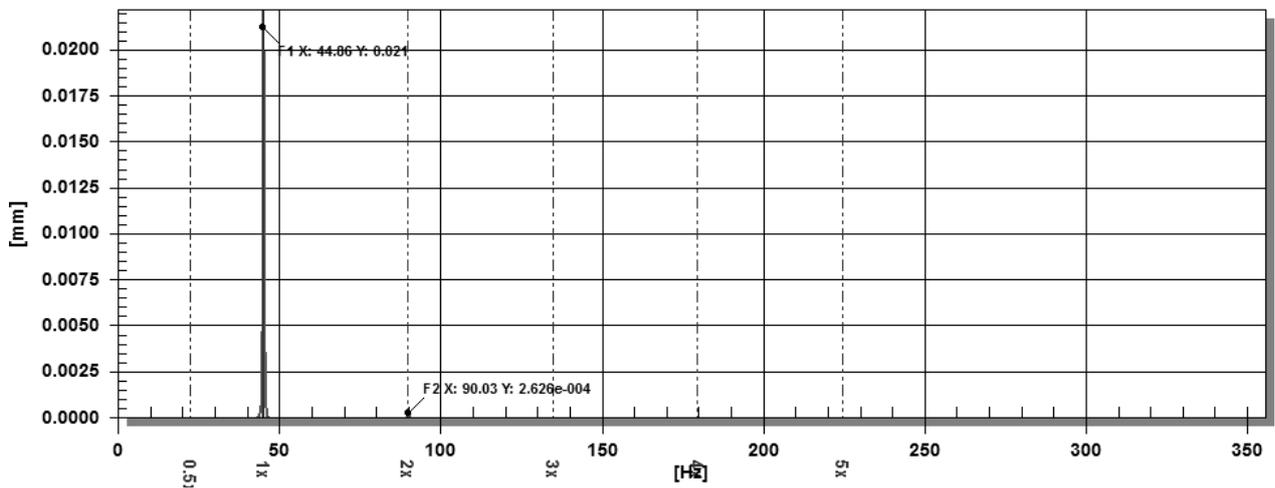


Рис. 13 Спектры сигнала на режиме $\omega_{\dot{\theta}}$ в линейных координатах

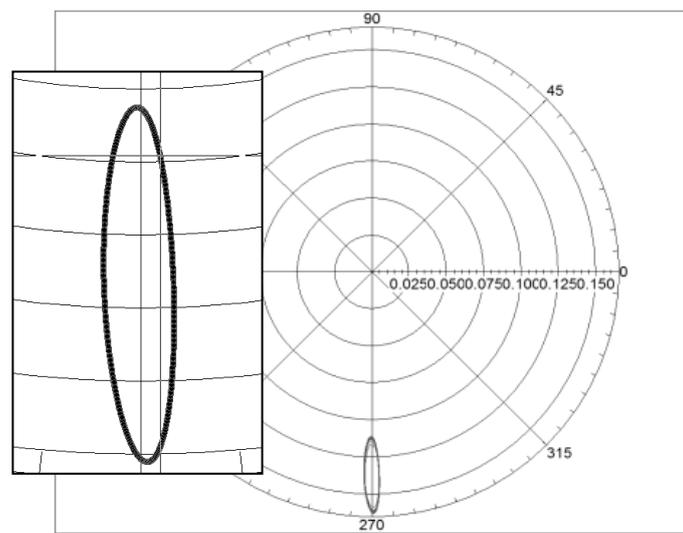


Рис. 14 Орбиты центра ротора в сечении трещины на режиме $\omega_{\dot{\theta}}$

Из полученных результатов следует, что появление субгармонических резонансов может являться диагностическим признаком появления трещины. Наилучшим диагностическим режимом обнаружения кратных роторных гармоник является режим $1/3$ от первой критической частоты. На нем проявляются три гармоники роторной частоты близкие по значениям амплитуд.

Заключение

Использование разработанной модели трещины в алгоритмах анализа динамических характеристик роторов с трещинами существенно снижает необходимое время для их моделирования и анализа. Результаты проведенных расчетов показывают, что трещина в вале исследуемого ротора вызывает параметрические резонансы, на режимах $1/3 \omega_{\text{сд}}$, $1/3 \omega_{\text{сд}}$, $\omega_{\text{сд}}$ являющиеся следствием роторных гармоник с частотами $1x$, $2x$, $3x$, $4x$ и т.д. В реальных экспериментах представляется возможным выделить две или три роторных гармоники. Наличие субгармонических резонансов, кратных гармоник и изменение орбиты движения сечений вала могут служить признаками появления трещины. Вместе с тем следует иметь в виду, что вероятность обнаружения трещины в реальной практике, зависит от ее геометрии и глубины, чувствительности используемой аппаратуры, наличия датчиков орбит и т.д. Поэтому предложенную методику и алгоритм необходимо рассматривать в первую очередь как инструмент для подготовки инженеров в области вибрационной диагностики, а также для получения предельных значений диагностических признаков трещины.

Библиографический список

1. Bachschmid N., Pennacchi P., Tanzi E. Cracked rotors. Springer, 2010. 399 p.
2. J.E.T. Penny and M.I. Friswell. Simplified modelling of rotor cracks. Proceedings of ISMA 2002. Vol. 2. pp. 607-616.
3. J. Gomez-Mancilla, J.M. Machorro-Lopez and V.R. Nosov. Crack breathing mechanisms in rotor – bearing systems, its influence on system response and crack detection. ISCORMA – 3, Cleveland, Ohio, 19-23 September 2005. 10p.
4. O.S. Jun, H.J. Eun, Y.Y. Earmme, C.W. Lee. Modeling and vibration analysis of a simple rotor with a breathing crack. Journal of Sound and Vibration 155 (1992) pp. 273–290.
5. A.K. Darpe, K. Gupta, A. Chawla. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor. Journal of Sound and Vibration 269 (2004) pp. 33–60.
6. J.-J. Sinou and A.W. Lees. A non-linear study of a cracked rotor. European Journal of Mechanics - A/Solids. Vol. 26, Issue 1, January-February 2007, pp. 152-170.
7. A. C. Chasalevris. Vibration analysis of nonlinear-dynamic rotor-bearing systems and defect detection. Ph.D. Dissertation. University of Patras Press, 2009. 299p.
8. K.Kamiya, T.Yoshinaga. Nonlinear steady-state vibration analysis of a beam with breathing cracks (finite element analysis based on the mixed variation principle). Journal of System Design and Dynamics. Vol. 2, No.3, 2008 pp. 750-761.

9. Инженерно-консультационный центр по роторной динамике турбомашин различного назначения «Альфа - Транзит»: 2002-2014, URL: <http://www.rotordynamics.ru/>. (Дата обращения: 7.08.2014).
10. A. D. Dimarogonas and C. A. Papadopoulos. Vibration of cracked shafts in bending. *Journal of Sound and Vibration* 91(4) (1983), pp. 583-593.